PROPOSTA DE UTILIZAÇÃO DE BETA-INDICADOR COMO MODELO DETERMINÍSTICO PARA GESTÃO DE CUSTOS ESTIMADOS

MANUEL MEIRELES
MÁRCIO MARIETTO
CIDA SANCHES
SILVANA MARTINS

Resumo:

Este trabalho propõe um modelo determinístico aplicado ao controle de custos com base em Beta-indicadores. O modelo de -indicadores possibilita a gestão de custos estabelecendo alertas, especialmente nos casos em que os custos são estimados por meio de valores: otimista (a), mais-provável (m) e pessimista (b). Ou seja: dados os valores a, m e b de custos estimados o modelo de -indicadores atribui uma distribuição probabilística do tipo . O modelo proposto é aplicável à gestão de custos e pode ser aplicado de diversas formas: i) para estabelecer níveis de alerta para custos estimados; ii) para estabelecer estimativas decorrentes de duas outras ou mais; e iii) para determinar a probabilidade de certo custo ser alcançado ou ultrapassado. A análise da acurácia do modelo foi feita por simulação e testes para aferir o grau de aderência dos valores observados aos valores esperados.

Área temática: *Aplicação de Modelos Quantitativos na Gestão de Custos*

Proposta de utilização de Beta-indicador como modelo determinístico para gestão de custos estimados

Resumo

Este trabalho propõe um modelo determinístico aplicado ao controle de custos com base em Beta-indicadores. O modelo de β-indicadores possibilita a gestão de custos estabelecendo alertas, especialmente nos casos em que os custos são estimados por meio de valores: otimista (a), mais-provável (m) e pessimista (b). Ou seja: dados os valores a, m e b de custos estimados o modelo de β-indicadores atribui uma distribuição probabilística do tipo β. O modelo proposto é aplicável à gestão de custos e pode ser aplicado de diversas formas: i) para estabelecer níveis de alerta para custos estimados; ii) para estabelecer estimativas decorrentes de duas outras ou mais; e iii) para determinar a probabilidade de certo custo ser alcançado ou ultrapassado. A análise da acurácia do modelo foi feita por simulação e testes para aferir o grau de aderência dos valores observados aos valores esperados.

Palavras-chave: Gestão de custos estimados. Custos estimados. Beta-indicadores.

Área Temática: Aplicação de Modelos Quantitativos na Gestão de Custos.

1 Introdução

O presente artigo propõe que o modelo probabilístico de Beta-indicador (neste trabalho designado por β-indicador ou βi) pode ser aplicado à gestão de custos. O que está em foco, na presente pesquisa, é a forma como o modelo de β-indicador pode ser usado para fundamentar decisões de forma mais eficiente, na gestão de custos.

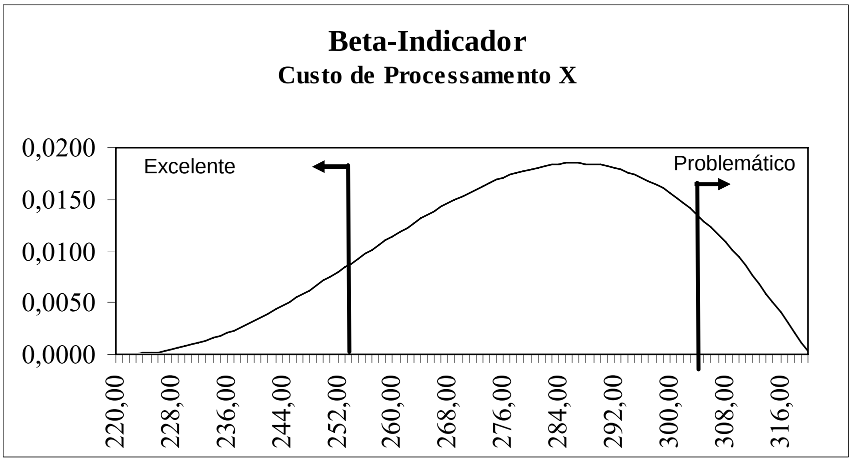

Fig. 1: Exemplo de β-indicador de “Custos de Processamento” estabelecendo faixas de desempenho.

Numa primeira abordagem pode-se considerar β-indicador como sendo um tipo de indicador que tem as características de vetor (isto é: é orientado) e estabelece faixas de desempenho (Fig. 1). Tais faixas são decorrentes da média e respectiva variância da variável associada ao β-indicador, considerando-se que os valores seguem uma β-distribuição (ou distribuição probabilística do tipo beta). Essa distribuição é considerada partindo-se do pressuposto que, para qualquer tipo de variável monetária ($), como receitas, despesas ou custos é possível associar valores esperados ou de desempenho: otimista, mais-provável e pessimista. Neste trabalho o objeto de estudo é a gestão de custos, embora características semelhantes possam ser aplicadas a despesas e receitas.

O modelo de β-indicadores possibilita a gestão de custos estabelecendo valores de alerta, especialmente nos casos em que os custos são estimados por meio de valores: otimista (**a**), mais-provável (**m**), e pessimista (**b**). Ou seja: dados os valores **a**, **m** e **b** de custos estimados o modelo de β-indicadores atribui uma distribuição probabilística do tipo β. Com base em tal distribuição β pode-se não só estabelecer indicadores de alerta, mas determinar probabilidades associadas a custos.

Belchior (1974: 196) mostra que quando se dispõe de três estimativas (otimista, mais provável e pessimista) representadas por a, m e b, se tem uma distribuição associada a uma distribuição beta com as seguintes propriedades:

- Possui extremos bem definidos, não sendo assintótica aos eixos;
- Pode ser assimétrica para ambos os lados, conforme os valores a, b e m;
- Permite a determinação dos parâmetros da distribuição conhecendo-se a moda (mais provável m) e os extremos inferior e superior (a e b);
- Quando os valores atribuídos a a, m e b são próximos, a curva toma um aspecto estreitado, ao contrário do que acontece quando os valores são afastados, caso em que a curva se torna alargada, embora em ambos os casos a média possa ter o mesmo valor;
- A função beta com base nas estimativas a, m e b nos permite determinar o valor médio esperado (VM), o respectivo desvio padrão (s) a variância (s^2) e o coeficiente de variação (CV).

A utilização de três estimativas (a, m e b) é muito comum nos estudos envolvendo tempo em redes PERT/CPM e muitos autores declaram que a função segue a beta distribuição. Irving (2000) num estudo sobre PERT com tempos estimados probabilisticamente, afirma que quando os tempos das atividades não são conhecidos com precisão podem ser utilizados tempos estimados. Para cada atividade definem-se os tempos otimista, pessimista e mais provável e se parte da premissa que a variabilidade dos tempos estimados segue a distribuição beta. Walker II (2001) afirma que se assume que as atividades PERT/CPM seguem uma beta distribuição. Anderson *et alli* (2003) afirmam que as simulações da duração das atividades individuais de projetos (PERT) são feitas geralmente usando a beta distribuição. Fente *et alli* (1999) afirmam que na maioria das aplicações de simulação para construção, a Função de Distribuição de Probabilidade subjacente (PDF) é geralmente desconhecida, e, por conseguinte, se terá que selecionar uma PDF. Tal escolha muitas vezes é feita por análise de sensibilidade, havendo o efeito da informação subjetiva na escolha dos parâmetros da distribuição de Beta a ser usada nos modelos de simulação.

Deming *apud* Walton (1968: 43) chama a atenção para a questão da variabilidade. Na medida em que os *inputs* de um processo referentes à mão-de-obra, matéria prima, máquinas, medidas, meio-ambiente (mesmo considerando o método constante) não são constantes, não faz sentido esperar um *output* constante. Essa autora mostra como Deming *op sit*, por meio da parábola das contas vermelhas enfatiza que a variação faz parte de qualquer processo:

> "À medida que o Dr. Deming vai falando, os ouvintes vão captando a mensagem básica: a de que, mesmo com ferramentas, tarefas e capacidade idênticas, a produção varia. Imitando um capataz, o Dr. Deming diz que os administradores têm o costume de culpar os operários por resultados que lhe escapam ao controle. Além do mais, dado qualquer número de operários, alguns sempre estarão abaixo da média e outros acima."

Desta forma, parece razoável supor que quaisquer metas de um processo, especialmente as metas referentes a custos, são mais realistas quando consideram a inevitável variabilidade.

2 Aspectos Metodológicos Relevantes

A presente pesquisa argumenta que por meio do uso do modelo probabilístico de β-indicador é possível estabelecer a gestão de custos de forma semelhante aos estudos envolvendo tempo em redes PERT/CPM. A pesquisa faz uso de técnicas (1) estatísticas paramétricas e não paramétricas; e (2) simulação.

Basicamente o modelo proposto gera uma curva de distribuição de densidade beta, com parâmetros α e β, partindo de três valores dados: custo otimista (a), custo mais provável (m) e custo pessimista (b). Com base na curva gerada (Fig. 2), podem ser definidos pontos de alerta correspondentes a uma dada proporção sob a curva (E e D).

Para verificar a acurácia do modelo proposto, por meio de simulação foram geradas β-distribuições com os parâmetros α e β e foram contados os valores nas regiões E e D. A β-distribuição gerada diz-se adequada se as proporções dos valores contados na simulação são as mesmas (ou muito próximas) das proporções especificadas.

	B	C	D	E	F	G	H	I	J
2	**Beta Indicador**	Custo de Processamento X							
3	**a**= menor valor	**220,000**							
4	**m**=mais provável	**285,000**							
5	**b**= maior valor	**320,000**							
6	**Alpha**	**3,240**							
7	**Beta**	**2,160**							
8	*Mean*	*0,600*							
9	*Variance*	*0,037*							
10	*m/Moda*	*0,983*							
11	*moda*	*0,659*							
12	Steps	1,000							
13	MP=Média pond.	280,000							
14	MPN=Méd.Pond Normal,	0,600							
15	ModN=Moda Normalizada	0,650							
16	Média Beta Distr.	286,749							
17	Moda	289,948	Limitadores	10% esq.	**253,061**	10% direita	**304,926**	Mediana	**281,316**
18	h=MPN/(1-MPN)	1,500		20% esq	**262,444**	20% direita	**298,061**	8,63999885	**1,111**
19	NumBeta	-0,300	DenBeta	-0,125	"Beta&Alpha"	**2,400**	**3,600**	Assimetria	-0,279
20	Outros limitadores		**15,0**	15% à esq.	**258,194**	15% à direita	**301,287**		

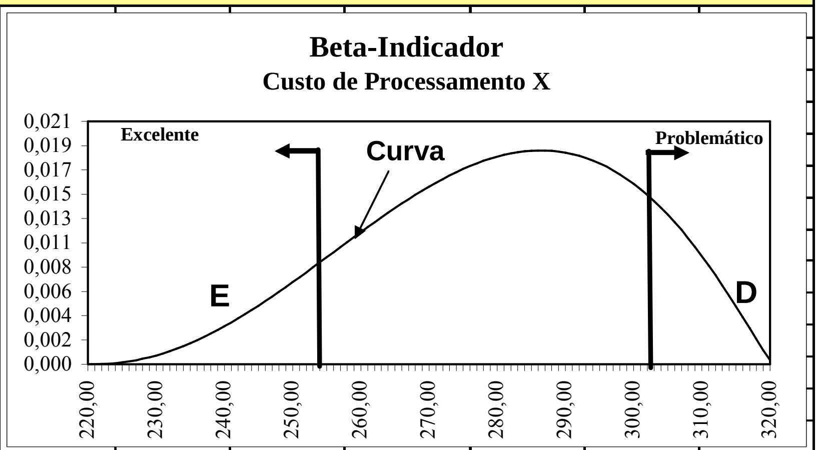

Fig. 2: β-indicador gerado a partir de três valores dados (**a, m, b**). O modelo gera uma distribuição beta com parâmetros Alpha e Beta.

A figura 3 mostra o formato geral do *software* (uma planilha *Excel*), para especificação de β-indicador subordinada ao conjunto de valores a, m, b. A planilha define, automaticamente, a β-distribuição, desenha a curva e estabelece limitadores de 10% e 20% à esquerda e á direita e possibilita que outros limitadores sejam também definidos. No exemplo são mostrados limitadores de 10% e 20%, além de 15% à esquerda e à direita.

Para se construir um sentimento de evidência, com elementos de boa qualidade de que o modelo proposto de gestão com β-indicadores é adequado, fez-se uso de simulações. O princípio que norteou a escolha de tal método é simples: se a β-distribuição definida pelos parâmetros Alpha e Beta é adequada aos espectros a, m, b, então uma β-distribuição gerada por simulação com tais parâmetros deve conter as proporções de valores indicadas pelos pontos limitadores. Isto é: se se afirma que os parâmetros Alpha e Beta são adequados, então numa dada simulação de N valores deve ocorrer a proporção indicada, caso os parâmetros Alpha e Beta estejam corretos.

Tomando o exemplo da figura 3, pode-se simular uma β-distribuição, com valores entre 70 e 250 e parâmetros Alpha=2,062 e Beta=3,395 e obter a quantidade de valores àquem e além dos limitadores.

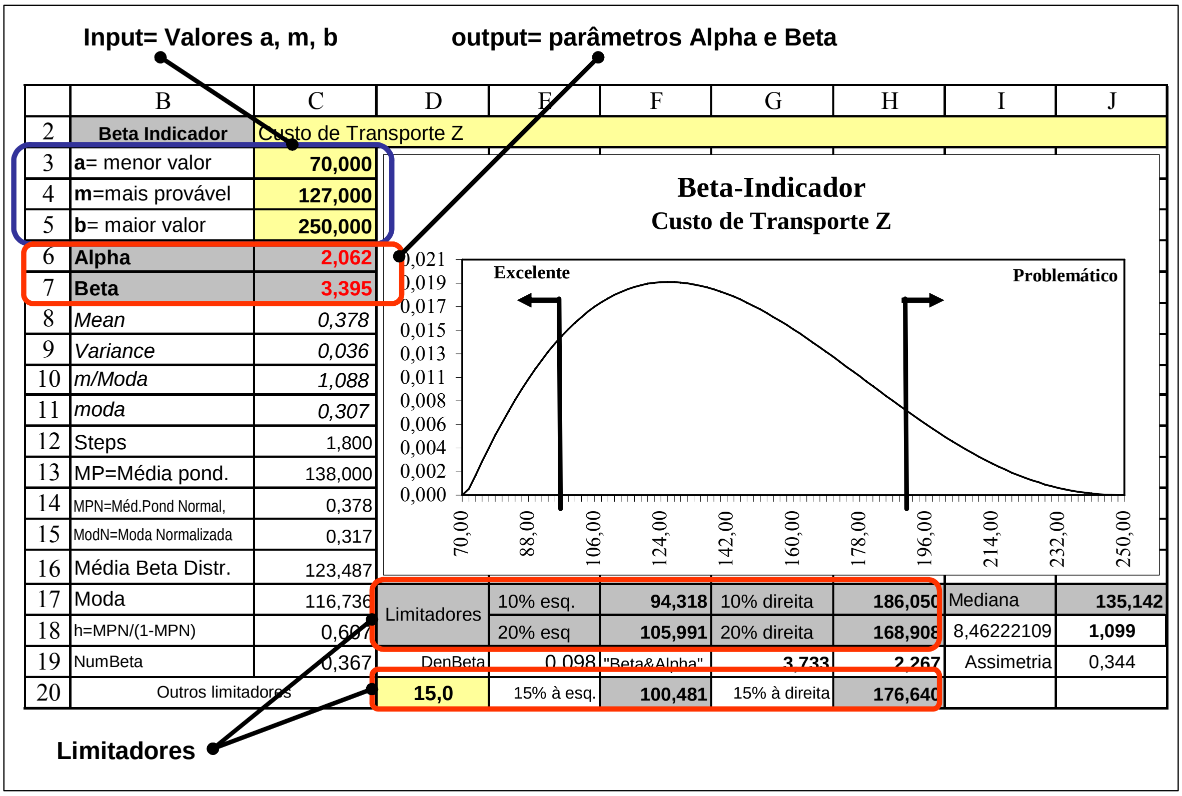

Fig 3: Formato geral do *software* (uma planilha *Excel*), para especificação de β-indicador subordinada ao conjunto de valores a, m, b.

Tabela 1: Exemplo de simulação para verificar a acurácia do β-indicador.

MTB > Random 100000
SUBC> Beta 2,062 3,395.
MTB > let c2=c1*180+70
MTB > let c3=c2<94,318
MTB > let c4=c2>186,050
MTB > let c5=c2<105,991
MTB > let c6=c2>168,908
MTB > let c7=c2<111,131
MTB > let c8=c2>162,165
MTB > let c9=c2>135,142
Sum of <94,318 = 9994 ➔ valor esperado: 10000 (erro= 6/10000= 0,06%)
Sum of >186,050 = 9962 ➔ valor esperado: 10000 (erro=38/10000= 0,38%)
Sum of <105,991 = 19936 ➔ valor esperado: 20000 (erro=64/20000= 0,42%)
Sum of >168,908 = 19888 ➔ valor esperado: 20000 (erro=112/20000= 0,56%)
Sum of <111,131 = 24869 ➔ valor esperado: 25000 (erro=131/25000= 0,52%)
Sum of >162,165 = 24813 ➔ valor esperado: 25000 (erro=187/25000=0,75%)
Sum of >135,142 = 50110 ➔ valor esperado: 50000 (erro=110/50000=0,22%)

Variable	N	Mean	Median	TrMean	StDev	SE Mean
bi-801	100000	137,99	135,24	137,09	34,29	0,11

Variable	Minimum	Maximum	Q1	Q3
bi-801	70,31	246,20	111,24	161,93

Fonte: Autores.

Tomando o exemplo acima, pode-se simular uma β-distribuição, com valores entre 70 e 250 e parâmetros Alpha=2,062 e Beta=3,395 e obter a quantidade de valores àquem e além dos limitadores.

A tabela 1 exprime o resultado de uma simulação típica e que deve ser assim entendida:

- Inicialmente considerou-se o conjunto de valores a, m e b (70, 127 e 250) como mostra a figura 3;
- Após ter sido feita a introdução de tais valores, o software dá como output os parâmetros Alpha=2,062 e Beta=3,395 além da curva e de outras informações, entre elas os valores dos limitadores. Pela figura 3 pode-se ver que, de acordo com o modelo entre 70,000 e 94,318 a área sob a curva representa 10% da área total. Da mesma forma se sabe os valores que delimitam áreas, tanto à esquerda quanto à direita, referentes a 10%, 20%, 25% e 50% (mediana).
- A questão à qual a simulação pretende responder é a seguinte:–Os parâmetros e a curva são ajustados aos valores a, m e b? Para responder a esta questão utiliza-se a simulação: no software Minitab r.13 são gerados 100 000 valores randômicos sob a designação de ‘d801’ com distribuição Beta e parâmetros Alpha=2,062 e Beta=3,395

  MTB > Random 10000 ;
  SUBC> Beta 2,062 3,395.
- Os valores gerados randomicamente situam-se entre zero e um. Como os valores a e b são, respectivamente, 70,000 e 250,000 os valores gerados são convertidos para tal intervalo por meio da instrução.

  *MTB > let c2=c1*180+70*
- Tem-se, agora, uma β-distribuição com parâmetros Alpha=2,062 e Beta=3,395, gerada aleatoriamente entre valores 70,00 e 250,00. Para verificar estas condições podem-se olhar as estatísticas descritivas dos valores gerados:

  Descriptive Statistics: bi-801

Variable	*N*	*Mean*	*Median*	*TrMean*	*StDev*	*SE Mean*
bi-801	*100000*	*137,99*	*135,24*	*137,09*	*34,29*	*0,11*

Variable	*Minimum*	*Maximum*	*Q1*	*Q3*
bi-801	*70,31*	*246,20*	*111,24*	*161,93*
- As estatísticas descritivas dos valores simulados mostram que o menor valor é 70,31 (próximo de 70,00) e o maior valor é 246,20 (próximo de 250,00)
- O modelo informa que o limitador de 10% à esquerda é 94,318. Se os parâmetros Alpha e Beta gerados pelo modelo são adequados, então deverá se observar a ocorrência de 10% dos valores gerados abaixo de 94,318. É possível selecionar e contar tais valores:

  MTB > let c3=c2<94,318
  Sum of <94,318 = 9994
- Tendo sido gerados 100 000 valores, 10% deles correspondem a 10000. Verifica-se, neste caso que a simulação da β-distribuição com parâmetros Alpha=2,062 e Beta=3,395 apresentou apenas 9994 casos.
- Se o valor esperado é de 10 000 e se verificou-se a ocorrência de 9994, ocorreu um erro de 6 em 10000, isto é, de 0,06%, Isso é mostrado pela informação:

  9994 ➔ valor esperado: 10000 (erro= 6/10000= 0,06%)
- Semelhante procedimento foi feito para cada um dos limitadores definidos pelo modelo:

9994 ➔ valor esperado: 10000 (erro= 6/10000= 0,06%)
9962 ➔ valor esperado: 10000 (erro= 38/10000= 0,38%)
19936 ➔ valor esperado: 20000 (erro= 64/20000= 0,42%)
19888 ➔ valor esperado: 20000 (erro=112/20000= 0,56%)
24869 ➔ valor esperado: 25000 (erro=131/25000= 0,52%)
24813 ➔ valor esperado: 25000 (erro=187/25000= 0,75%)
50110 ➔ valor esperado: 50000 (erro=110/50000= 0,22%)

Além do cálculo do erro relativo foram realizados outros testes não-paramétricos.

3 Modelo Proposto

No presente modelo parte-se da premissa que é possível estabelecer estimativas de custos otimista, mais provável e pessimista. Tais valores podem ser estabelecidos pelos gerentes, individual ou consensualmente, para todas as variáveis que gerenciam. Desta forma, tem-se: 1) a= estimativa menor; 2) m= mais provável; 3) b= estimativa maior.

Bury (1975: 353) afirma que uma importante aplicação da β-distribuição concerne à coordenação de complexos e interrelacionados conjuntos de atividades envolvendo incertezas. Tal técnica é conhecida por PERT–*Program Evaluation and Review Technique*. O *input* quantitativo para o controle por esta técnica consiste em estimar o valor esperado e a variância das atividades que compõem o programa global. A maioria das atividades industriais caracteriza-se por certas limitações práticas; assim, uma determinada atividade não pode ser completada em menos de um certo tempo mínimo μ1 ou não demora mais do que um tempo μ2. É assumido então comumente que o tempo de conclusão do projeto assume uma distribuição β.

Ainda de acordo com Mittelhammer (1995: 195), algumas propriedades da β-distribuição incluem:

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \qquad (01)$$

$$\sigma^2 = \frac{\alpha \quad \beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$$

$$\mu_3 = \frac{2(\beta-\alpha)(\alpha \quad \beta)}{(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^3} \qquad (02)$$

Stanger (1967: 47), Lester (1982: 39) e Turtle (1994: 117) afirmam que conhecidos os valores acima se obtém a média μ e a variância σ^2 pelas fórmulas:

$$\mu = \frac{1}{6}(a + 4m + b)$$

$$\sigma^2 = [\frac{1}{6}(b-a)]^2 \qquad (03)$$

Bury (1975: 353) explica tais fórmulas do seguinte modo: o valor esperado e a variância de um tempo de conclusão (numa rede PERT) podem ser bastante difíceis de calcular diretamente para uma determinada atividade. Desta forma, estimativas mais significantes são oferecidas, tais como, o tempo *mais provável* ***m,*** o tempo *otimista* ***a*** e o tempo *pessimista* **b**.

Bury *op cit* começa apresentando a beta distribuição como sendo

$$f_B(x;\lambda_1;\lambda_2) = \frac{\Gamma(\lambda_1+\lambda_2)}{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_2)}\int_0^x x^{\lambda_1-1}(1-x)^{\lambda_2-1}dx \qquad (04)$$

onde a integral na equação (04) define a "função beta incompleta":

$$B_X(\lambda_1;\lambda_2) = \int_0^x x^{\lambda_1-1}(1-x)^{\lambda_2-1}dx \qquad (05)$$

O enésimo momento (r) de X, de acordo com Bury (1975) pode ser calculado por:

$$\mu_r^{'}(X) = E \quad \{X^r\} = \int_0^1 x^r \; f_B(x;\lambda_1;\lambda_2)dx \qquad (06)$$

Dado que o valor esperado de X é

$$\mu_1^{'}(X) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} \qquad (07)$$

e a variância de X é:

$$\mu_2(X) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1+\lambda_2)^2(\lambda_1+\lambda_2+1)} \qquad (08)$$

A moda é dada por

$$\hat{x} = \frac{\lambda_1-1}{\lambda_1+\lambda_2-2} \qquad (09)$$

Observar que as equações acima apresentadas por Bury (1975) são equivalentes às Mittelhammer (1995: 195) descritas em (02), bastando substituir λ_1 por α e λ_2 por β:

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

$$\sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{[(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2]} \qquad (10)$$

$$\mathrm{mod}\, a = \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-2} \qquad (11)$$

Bury *op cit* afirma que a alta flexibilidade da distribuição Beta a recomenda para ser utilizada sempre que uma variável X tem infinitos valores entre μ_1 e μ_2 (ou entre **a** e **b**). Bury apresenta as suas fórmulas usando μ_1 como sendo o menor valor do intervalo; μ_2 como sendo o maior valor e $\hat{r}$ como sendo o valor modal, o mais provável. Faz uso também de λ_1 e de λ_2. Cabe destacar que tais valores são respectivamente: **a**, **b**, **m,** α e β.

Considerando infinitos valores entre μ_1 e μ_2, a moda $\hat{\hbar}$, de acordo com Bury (1975: 340) é dada por:

$$\hat{\hbar} = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)\frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1 + \lambda_2 + 2} \qquad (12)$$

deriva-se o valor esperado μ_1' em termos da moda $\hat{\hbar}$:

$$\mu_1' = \frac{\mu_1 + (\lambda_1 + \lambda_2 - 2) + \mu_2}{\lambda 1 + \lambda 2} \qquad (13)$$

Por razões de conveniência de cálculo, na rede PERT, a equação (13) é aproximada para:

$$\hat{\hbar}_E = \frac{a + 4m + b}{6} \qquad (14)$$

implicando que a moda estimada ***m*** é ponderada em relação a (**a**+**b**)/2 na proporção de 2:1.

De forma semelhante, a variância

$$\mu_2 = \frac{(\mu_2 - \mu_1)^2 \lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 (\lambda_1 + \lambda_2 + 1)} \qquad (15)$$

é aproximadamente calculada por

$$\text{var} = \frac{(b - a)^2}{36} \qquad (16)$$

pelo que o desvio padrão é (**b**-**a**)/6.

Na prática, afirma Bury *op cit* (p.353), *a rede PERT, nas expressões (14) e (16) obtém valores que são adequados em relação às estimativas de **m**, **a** e **b**.* Deve ser notado que na aproximação da equação (13) pela (14) que $\lambda_1 + \lambda_2 = 6$ e que na aproximação da equação (15) pela (16), que $\lambda_1 \lambda_2 = 7$. Com efeito:

$$\mu_1' = \frac{\mu_1 + (\lambda_1 + \lambda_2 - 2) + \mu_2}{\lambda 1 + \lambda 2} = \frac{a + (6 - 2)m + b}{6} \qquad (17)$$

onde a=μ_1; b=μ_2 , m=$\hat{\hbar}$ e $\lambda_1 + \lambda_2 = 6$; e

$$\mu_2 = \frac{(\mu_2 - \mu_1)^2 \lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 (\lambda_1 + \lambda_2 + 1)} = \frac{(b - a)^2 \lambda_{1\lambda_2}}{6^2.7} = \frac{(b - a)^2}{36} \qquad (18)$$

onde a=μ_1; b=μ_2 , m=$\hat{\hbar}$; $\lambda_1 + \lambda_2 = 6$; e $\lambda_1 \lambda_2 = 7$.

A seguir são apresentadas algumas propriedades e limitações do modelo proposto que é baseado na β-distribuição acima discutida.

1) O modelo considera que os valores a, m e b são dispostos de tal forma que a represente o menor valor; b o maior valor e m um valor intermediário entre a e b, isto é: b>m>a;

2) ao valor m, o mais esperado é também considerado como valor modal; a média ponderada (*MedPond*) de tais valores é dada por:

$$MedPond = \frac{4 * m + a + b}{6} \tag{19}$$

	B	C	D	E	F	G	H	I	J
2	**Beta Indicador**	Custo de Estocagem Y							
3	**a**= menor valor	**100,000**							
4	**m**=mais provável	**120,000**							
5	**b**= maior valor	**140,000**							
6	**Alpha**	**2,646**							
7	**Beta**	**2,646**							
8	*Mean*	*0,500*							
9	*Variance*	*0,040*							
10	*m/Moda*	*1,000*							
11	*moda*	*0,500*							
12	Steps	0,400							
13	MP=Média pond.	120,000							
14	MPN=Méd.Pond Normal,	0,500							
15	ModN=Moda Normalizada	0,500							
16	Média Beta Distr.	120,000							
17	Moda	120,000	Limitadores	10% esq.	**109,263**	10% direita	**130,737**	Mediana	**120,000**
18	h=MPN/(1-MPN)	1,000		20% esq	**112,608**	20% direita	**127,392**	9,00180027	**1,134**
19	NumBeta	0,000	DenBeta	0,000	"Beta&Alpha"	**3,000**	**3,000**	Assimetria	0,000
20	Outros limitadores		**15,0**	15% à esq.	**111,066**	15% à direita	**128,934**		

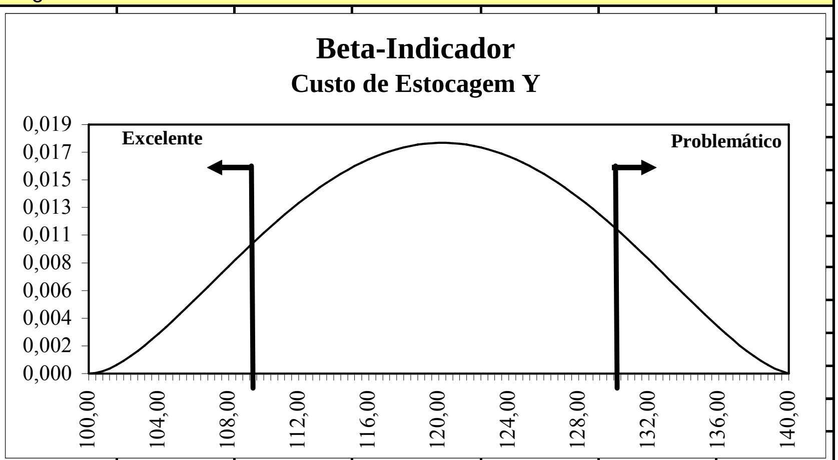

Fig. 4: Quando (m-a)=(b-a), adota-se para os parâmetros α e β o valor discricionário 2,646. Neste caso a curva tem uma discreta forma de sino

3) Embora *software* específico possa ser aplicado para a determinação da β-distribuição, no presente caso considerou-se o uso de uma planilha *Excel*, na medida em que tal planilha tem já um conjunto de funções que possibilita obter não só os parâmetros α (Alpha) e β (Beta) da β-distribuição, como a curva da β-densidade. Caso se observe que as estimativas menor e maior são simétricas em relação à estimativa mais provável, isto é, no caso de se observar que **m-a** = **b-m**, infinitos valores iguais podem ser atribuídos para Alpha e Beta. Neste caso α e β assumem o valor discricionário 2,646 que produz uma curva em discreta forma de sino. A figura 4 mostra isso.

O modelo permite, também, que sejam feitas operações algébricas de β-indicadores. Desta forma, no que concerne a custos, é possível adicionar, subtrair, multiplicar e dividir estimativas. Os procedimentos são os seguintes:

Adição: (a1, m1, b1) com MP1 e dp1+ (a2, m2, b2) com MP2 e dp2

➔ $a_r = a_1 + a_2$ (20)

➔ $b_r = b_1 + b_2$ (21)

➔ $MP_r = MP_1 + MP_2$ (22)

➔ $m_r = \dfrac{6MP_r - a_r - b_r}{4}$ (23)

➔ $dp_r = \sqrt{\dfrac{(b_r - a_r)^2}{36}}$ (24)

Pela equação (14) sabe-se que $MedPond = MP = \dfrac{4*m+a+b}{6}$. Daqui se deduz a equação (23): $m_r = \dfrac{6MP_r - a_r - b_r}{4}$.

Subtração: (a_1, m_1, b_1) com MP_1 e dp_1 - (a_2, m_2, b_2) com MP_2 e dp_2

➔ $a_r = a_1 - a_2$ ou $a_1 - b_2$ (o menor dos dois valores) (25)

➔ $b_r = b_1 - b_2$ ou $b_1 - a_2$ (o maior dos dois valores) (26)

➔ $MP_r = MP_1 - MP_2$ (27)

➔ $m_r = \dfrac{6MP_r - a_r - b_r}{4}$ (28)

➔ $dp_r = \sqrt{\dfrac{(b_r - a_r)^2}{36}}$ (29)

Multiplicação: (a1, m1, b1) com MP1 e dp1 x (a2, m2, b2) com MP2 e dp2

➔ $a_r = a_1 \text{ x } a_2$ (30)

➔ $b_r = b_1 \text{ x } b_2$ (31)

➔ $MP_r = MP_1 \text{ x } MP_2$ (32)

➔ $m_r = \dfrac{6MP_r - a_r - b_r}{4}$ (33)

➔ $dp_r = \sqrt{\dfrac{(b_r - a_r)^2}{36}}$ (34)

Divisão: (a_1, m_1, b_1) com MP_1 e dp_1 por (a_2, m_2, b_2) com MP_2 e dp_2

➔ $a_r = a_1 / a_2$ ou a_1 / b_2 (o menor dos dois valores) (35)

➔ $b_r = b_1 / b_2$ ou b_1 / a_2 (o maior dos dois valores) (36)

➔ $MP_r = MP_1 / MP_2$ (37)

➔ $m_r = \dfrac{6MP_r - a_r - b_r}{4}$ (38)

➔ $dp_r = \sqrt{\dfrac{(b_r - a_r)^2}{36}}$ (39)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	**Multiplicação de**										
2	**beta-indicadores**	**A**	**B**	Beta Indicador Resultante (A*B)							
3	**a**= menor valor	**5,000**	**9,000**	**45,000**							
4	**m**=mais provável	**7,000**	**15,000**	**98,750**							
5	**b**= maior valor	**11,000**	**18,000**	**198,000**							
6	**Alpha**	**2,111**	**3,317**	**4,263**							
7	**Beta**	**3,317**	**2,111**	**6,372**							
8	*Mean*	*0,389*	*0,611*	*0,401*							
9	*Variance*	*0,037*	*0,037*	*0,021*							
10	*m/Moda*	*1,048*	*0,969*	*1,006*							
11	*moda*	*0,324*	*0,676*	*0,378*							
12	Steps	0,060	0,090	1,530							
13	MP=Média pond.	7,333	14,500	106,333							
14	MPN=Méd.Pond Normal,	0,389	0,611	0,401							
15	ModN=Moda Normalizada	0,333	0,667	0,351							
16	Média Beta Distr.	6,888	15,168	99,535							
17	Moda	6,679	15,481	98,174	Limitadores	10% esq.	**78,119**	10% direita	**135,937**	Mediana	**105,349**
18	h=MPN/(1-MPN)	0,636	1,571	0,669		20% esq.	**86,683**	20% direita	**125,505**	8,64624602	1,111
19	NumBeta	0,333	-0,333	0,297	DenBeta	0,083	"Beta&Alpha"	**3,595**	**2,405**	Assimetria	0,218
20	Outros limitadores		**15,16**	15,16% à esq.	**82,90**	15,16% à direi	**130,00**	MPr=	106,333		
21	0,090909124	3,66666642	-0,1	2,333							

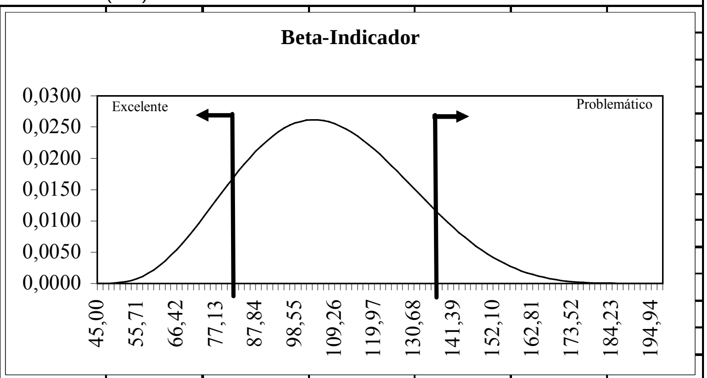

Fig. 5: Exemplo de multiplicação de dois β-indicadores.

4 Aplicabilidade do modelo

Na gestão de custos o modelo de β-indicadores pode ser aplicado de diversos modos:

- Como forma de estabelecer níveis de alerta para custos estimados: este exemplo é ilustrado pela figura 4. São estimados os custos (otimista, mais provável e pessimista) e se estabelece uma faixa de atuação normal, a região compreendida entre os alertas, correspondendo a 80% da área sob a curva, por exemplo. Se os custos observados ou projetados estiverem entre os valores \$109,263 e \$130,737 pode-se dizer que estão dentro da faixa normal e nenhuma ação é requerida; se os custos observados ou projetados estiverem além de \$130,737 é necessário atuar corretivamente; se estiverem aquém de \$109,263 o desempenho pode ser considerado excelente em relação às estimativas traçadas;
- Como forma de estabelecer estimativas decorrentes de duas outras ou mais, como ilustra a figura 5. Nesse exemplo são multiplicados dois β-indicadores. O caso de adição de β-indicadores pode ser utilizado para estimativa conjunta de duas ou mais estimativas como, por exemplo, em casos de custos estimados para um conjunto de atividades. O modelo permite também os casos de subtração e divisão de β-indicadores;
- Como forma de estabelecer a probabilidade de determinado valor ser alcançado ou ultrapassado. Na figura 5 é destacada esta possibilidade: por exemplo, a probabilidade de os custos serem superiores a \$130,00 é de 15,16%.

5 Resultados

Os resultados observados estão mostrados abaixo e referem-se a simulações com N=100.000.

Tabela 1: Resultados observados com simulações de β-indicadores.

Simulação N=100.000		
Limites 10% (esquerda e direita) Valores esperados= 10 000	Limites 20% (esqerda e direita) Valores esperados= 20 000	Mediana= limites 50% (direita) Valores esperados= 50 000
9962	20016	49969
9755	19859	49739
10102	20305	50186
9888	19890	49754
9937	19942	49874
10047	19931	
10105	20165	
9902	19985	
10275	20154	
10041	20040	

Fonte: Autores

Chi-squared Test for Independence - Simulação N=100.000
Alerta de 10%: Esperado= 10000
Chi-square: 9.412 Degrees of Freedom: 9 Table size: 10 rows, 2 columns. The P value is 0.4001.
Alerta de 20%: Esperado= 20000
Chi-square: 4.428 Degrees of Freedom: 9 Table size: 10 rows, 2 columns. The P value is 0.8810.
Mediana (50%): Esperado= 50000
Chi-square: 1.346 Degrees of Freedom: 4 Table size: 5 rows, 2 columns. The P value is 0.8535.

Fonte: Autores.

Quadro 1: Resultado do teste para aferir a acurácia do modelo.

A tabela 1 mostra os resultados observados em relação aos valores esperados e o quadro 1 mostra, por meio do teste χ^2 que tais valores são adequados estatisticamente, ao menos ao nível de significância de 0,05. Os testes realizados objetivaram verificar se os valores observados possuíam a mesma distribuição dos valores esperados. Neste sentido, quanto maior o p-value, no intervalo de 0 a 1, melhor a aderência.

O quadro 2 mostra uma análise dos intervalos de confiança dos valores observados nas simulações Pode-se observar que os limites dos intervalos de confiança, ao nível de significância de 5% são, em média, inferiores a 1,5%.

Descriptive Statistics: (I)10%; (I)20%; (I)50% Simulações N=100000

Variable	N	Mean	Median	TrMean	StDev	SE Mean
I(10%)	10	10001	10002	9998	145	46
I(20%)	10	20029	20001	20015	141	44
I(50%)	5	49904	49874	49904	183	82

Variable	Minimum	Maximum	Q1	Q3
I(10%)	9755	10275	9899	10103
I(20%)	19859	20305	19921	20157
I(50%)	49739	50186	49747	50078

Lower 95% IC		Upper 95% IC	
	9898		10105
	19928		20129
	49677		50132

Fonte: Autores

Quadro 2: Estatísticas descritivas dos valores observados nas simulações

Tabela 2: Análise dos intervalos de confiança.

Análise dos intervalos de confiança			
Beta-indicadores isolados			
Lim inferior	Esperado	Desvio Esq.	%
959,1	1000	40,9	4,09
1974,3	2000	25,7	1,29
4942,6	5000	57,4	1,15
9898,0	10000	102,0	1,02
19928,0	20000	72,0	0,36
49677,0	50000	323,0	0,65
		média % do desvio	**1,42**
Lim super	Esperado	Desvio Dir.	%
1010,5	1000	10,5	1,05
2027,5	2000	27,5	1,38
5019,8	5000	19,8	0,40
10105,0	10000	105,0	1,05
20129,0	20000	129,0	0,65
50132,0	50000	132,0	0,26
		média % do desvio	**0,80**

Fonte: Autores

A tabela 2 mostra os intervalos de confiança além de estarem centrados possuem uma acurácia aceitável. Foram feitas também simulações com β-indicares resultantes, isto é, oriundos de operação algébrica de dois ou mais β-indicadores. O comportamento dos β-indicadores resultantes foi satisfatório nas simulações (N=100 mil) realizadas. A maior média dos erros relativos foi de 3,83% no caso da divisão, como mostra o quadro 3. Cada erro foi calculado pela fórmula:

$$err = \frac{|valorObservado - valorEsperado|}{valorEsperado} \qquad (40)$$

Descriptive Statistics: err-soma; err-sub; err-mult; err-div						
Variable	N	Mean	Median	TrMean	StDev	SE Mean
err-soma	25	**0,01604**	0,01020	0,01527	0,01315	0,00263
err-sub	25	**0,00986**	0,00750	0,00927	0,00874	0,00175
err-mult	25	**0,01011**	0,01060	0,00984	0,00711	0,00142
err-div	25	**0,03834**	0,02770	0,03721	0,02169	0,00434
Variable	Minimum	Maximum	Q1	Q3		
err-soma	0,00150	0,04840	0,00615	0,02560		
err-sub	0,00050	0,03280	0,00205	0,01660		
err-mult	0,00050	0,02580	0,00320	0,01555		
err-div	0,01570	0,08700	0,02125	0,04600		

Fonte: Autores.

Quadro 3: Erros relativos observados em simulações com β-indicadores resultantes

É possível medir a acurácia geral do modelo por meio dos erros relativos observados em todas as simulações. Cada erro foi calculado pela fórmula (40) e as estatísticas descritivas estão mostradas no quadro 4. Observa-se que o erro médio foi de 2,123% considerando uma amostra de 166 casos. A média aparada, isto é, depois de excluídos 5% dos menores valores e 5% dos maiores valores são de 1,804%.

Descriptive Statistics: erroAbsGeral						
Variable	N	Mean	Median	TrMean	StDev	SE Mean
erroAbsG	166	0,02123	0,01550	0,01804	0,02430	0,00189
Variable	Minimum	Maximum	Q1	Q3		
erroAbsG	0,00000	0,18600	0,00665	0,02585		

Fonte: Autores.

Quadro 4: estatísticas descritivas dos erros relativos observados em todas as simulações.

Os erros relativos dos β-indicadores resultantes (soma= 1,6%; subtração= 1,0%; multiplicação= 1,0% e divisão= 3,83%) mostram que as fórmulas empiricamente obtidas para operação algébrica de dois β-indicadores parecem adequadas, embora, obviamente, novos esforços devam ser feitos para melhorar os resultados até agora obtidos.

6 Conclusões e recomendações

Acredita-se que se tenha atingido o objetivo principal do presente trabalho: propor um modelo determinístico para gestão de custos estimados com base em β-indicadores. O modelo proposto é aplicável à gestão de custos e pode ser aplicado de diversas formas: i) para estabelecer níveis de alerta para custos estimados; ii) para estabelecer estimativas decorrentes de duas outras ou mais; e iii) para determinar a probabilidade de certo custo ser alcançado ou ultrapassado.

Observar que a construção de um β-indicador resultante, isto é, proveniente de adição, subtração, multiplicação ou divisão de dois β-indicadores fundamenta-se sobre fórmulas ajustadas empiricamente. Desta forma é recomendável que se proceda a pesquisas adicionais com vistas a refinar o modelo neste critério.

Referências

ANDERSON; SWEENEY; WILLIAMS. **An introduction to Management Science: quantitative approaches to decision making**. New York: Tomson, 2003.

BELCHIOR, P. G. O. **Métodos de caminho crítico na administração de projetos**. Rio de Janeiro: Americana, 1974.

BURY, K. V. **Statistical Models in Applied Science**. New York: John Wiley, 1975.

FENTE, J. KNUTSON, K. SCHEXNAYDER, C. **Defining a Beta Distribution Function for Construction Simulation**. In: FARRINGTON, P. A. NEMBHARD, H. B. STURROCK, D. T. EVAN, G. W. (edts) Proceedings of the Simulation Conference. Winter, 1999.

IRWING. **Project Management with PERT/CPM.** New York: McGraw-Hill, 2000.

LESTER, A. **Project Planning and Control**. London: Butterworth, 1982.

MITTELHAMMER, R. C. **Mathematical statistics for economics and business**. New York: Springer, 1995.

STANGER, L. B. **Pert-CPM: técnica de planejamento e controle**. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1967.

TURTLE, Q. C. **Implementing concurrent project management**. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1994.

WALKER II, E. D. **Introducing Project Management Concepts using a Jewelry Store Robbery**. The Decision Sciences Journal of Innovative Education. Statesboro, 2001.

WALTON, M. **O método Deming de Administração**. Rio de Janeiro: Marques Saraiva, 1989.