

Modelo de Programação Linear para Otimização Financeira em Centro de Formação de Condutores

Elenoir Turazzi (UTFPR) - elenoirturazzi@gmail.com

Gérémi Gilson Dranka (UTFPR) - geremidranka@gmail.com

Mauro Lizot (UTFPR) - mauro.lizot@unochapeco.edu.br

José Donizetti de Lima (UTFPR) - donizetti@utfpr.edu.br

Resumo:

Os Centros de Formação de Condutores (CFCs) enfrentam desafios financeiros decorrentes da complexidade operacional e das exigências regulatórias do setor. Este artigo tem como objetivo desenvolver um modelo de Programação Linear (PL) que maximize o lucro de um CFC, considerando suas particularidades operacionais. A metodologia adotada é quantitativa e aplicada, com base em um estudo de caso de um CFC localizado no Sudoeste do Paraná. O modelo foi formulado com variáveis de decisão associadas aos serviços prestados e restrições operacionais, sendo resolvido com o método Simplex por meio do Solver do Excel. Os resultados demonstram que o modelo é capaz de identificar a melhor combinação de serviços e alocação de recursos. A proposta possui implicações práticas para a gestão financeira de CFCs, além de contribuir teoricamente ao aplicar técnicas de Pesquisa Operacional em um setor ainda pouco explorado, oferecendo uma estrutura replicável e ajustável a diferentes realidades institucionais

Palavras-chave: *Pesquisa Operacional; Programação Linear; Otimização Financeira; Gestão de Recursos; Centros de Formação de Condutores.*

Área temática: *Métodos quantitativos aplicados à gestão de custos*

Modelo de Programação Linear para Otimização Financeira em Centro de Formação de Condutores

RESUMO

Os Centros de Formação de Condutores (CFCs) enfrentam desafios financeiros decorrentes da complexidade operacional e das exigências regulatórias do setor. Este artigo tem como objetivo desenvolver um modelo de Programação Linear (PL) que maximize o lucro de um CFC, considerando suas particularidades operacionais. A metodologia adotada é quantitativa e aplicada, com base em um estudo de caso de um CFC localizado no Sudoeste do Paraná. O modelo foi formulado com variáveis de decisão associadas aos serviços prestados e restrições operacionais, sendo resolvido com o método Simplex por meio do Solver do Excel. Os resultados demonstram que o modelo é capaz de identificar a melhor combinação de serviços e alocação de recursos. A proposta possui implicações práticas para a gestão financeira de CFCs, além de contribuir teoricamente ao aplicar técnicas de Pesquisa Operacional em um setor ainda pouco explorado, oferecendo uma estrutura replicável e ajustável a diferentes realidades institucionais.

PALAVRAS CHAVE: Pesquisa Operacional; Programação Linear; Otimização Financeira; Gestão de Recursos; Centros de Formação de Condutores.

Área Temática: Métodos quantitativos aplicados à gestão de custos

1 - INTRODUÇÃO

Os Centros de Formação de Condutores (CFCs) são essenciais para a habilitação de novos motoristas e têm uma contribuição relevante para a segurança no trânsito e a regulamentação de condutores qualificados. No entanto, essas empresas enfrentam desafios financeiros complexos relacionados à maximização de lucros em um ambiente competitivo e regulado. A busca por eficiência, por meio do controle de custos operacionais, da otimização da capacidade e da adaptação às flutuações na demanda, é fundamental para garantir a sustentabilidade e crescimento dos CFCs. Nesse contexto, a aplicação de ferramentas de Pesquisa Operacional (PO) é relevante para aprimorar a tomada de decisões e otimizar o uso dos recursos disponíveis, resultando na melhoria financeira (Hillier e Lieberman, 2013; Montevechi, 2013).

Estudos recentes reforçam a relevância da aplicação da PL na maximização de lucros. Botelho *et al.* (2023) exploraram a aplicação dessa técnica em padarias, enquanto Carmo *et al.* (2023) aplicaram-na na produção de velas, identificando um aumento de 15% nos lucros com base em otimizações operacionais. Alfaia *et al.* (2023) e Spinelli *et al.* (2023) investigaram, respectivamente, a aplicação em panificadoras e docerias, evidenciando a versatilidade e os benefícios do uso da PL em diferentes contextos industriais. Esses estudos comprovam que, ao utilizar ferramentas como o Solver do Excel, é possível implementar alguns modelos de otimização para realidades específicas (Montini, 2004; Santos e Afonso, 2019).

Apesar dos avanços, a aplicação prática da PO em CFCs ainda se apresenta como uma lacuna. A maioria dos estudos focam em setores, como a manufatura e serviços tradicionais; mas poucos exploram o potencial de otimização em CFCs,

especialmente no que se refere à gestão de custos operacionais e a capacidade instalada. Essa carência evidencia uma oportunidade para o desenvolvimento de um modelo específico para CFCs, que possa maximizar o lucro ao considerar as particularidades e restrições deste tipo de serviço.

O problema de pesquisa identificado baseia-se nos desafios enfrentados pelos CFCs para a otimização do resultado financeiro diante de variáveis como custos operacionais, demanda flutuante e capacidade limitada. A PO surge como ferramenta promissora para otimizar o uso dos recursos e melhorar os resultados financeiros desses tipos de empresas. Assim, o problema consiste em desenvolver e implementar um modelo de PO que otimize os resultados financeiros de um CFC, levando em consideração os fatores operacionais, econômicos e regulatórios específicos do setor. Portanto, a questão central de pesquisa que norteia este estudo é: Como a PO pode ser utilizada para a otimização do resultado financeiro em CFCs, considerando as restrições e variáveis operacionais específicas do setor?

O objetivo geral do artigo é desenvolver e aplicar um modelo de PO para maximizar o lucro de CFCs. Os objetivos específicos incluem: (i) analisar variáveis operacionais e econômicas; (ii) formular um modelo matemático; (iii) aplicar um método adequado para a solução (Simplex, por exemplo), utilizando ferramentas computacionais; e (iv) validar o modelo por meio de um estudo de caso em um CFC específico. A aplicação do método Simplex e do software Solver do Excel permite que os gestores explorem cenários e ajustem suas operações com base em dados reais, promovendo uma gestão mais eficiente e uma otimização contínua dos processos (Prado, 1999).

Este estudo contribui tanto teoricamente quanto na prática para o campo da PO e da gestão de CFCs. Teoricamente, amplia a aplicação da PO para um setor pouco explorado, oferecendo uma abordagem metodológica detalhada e adaptável às particularidades do serviço de CFCs. Na prática, o modelo a ser desenvolvido poderá ser utilizado por gestores de CFCs como uma ferramenta de apoio à decisão, facilitando a gestão eficiente de recursos. Dessa forma, o estudo não só preenche lacunas na literatura existente, mas também oferece um modelo aplicável e ajustável, com potencial para gerar impactos positivos na gestão de CFCs.

Na seção 2, será apresentado o referencial teórico, abordando os conceitos fundamentais da PO, bem como estudos relevantes para a otimização financeira em CFCs. A seção 3 detalha a metodologia adotada, incluindo a formulação do modelo matemático e os critérios para definição das variáveis, restrições e função objetivo. Em seguida, a seção 4 apresenta os resultados obtidos com a aplicação do modelo, discutindo sua eficácia e impactos operacionais. Por fim, a seção 5 traz as conclusões do estudo, destacando as contribuições da pesquisa e sugestões para trabalhos futuros.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Pesquisa Operacional (PO)

A PO surgiu durante a Segunda Guerra Mundial para otimizar estratégias militares, principalmente na alocação de recursos limitados (Hillier & Lieberman, 2013; Mello & Mello, 2003; Chaves, 2011). A United States Air Force criou o grupo SCOOP, liderado por Marshall K. Wood, incluindo George B. Dantzig, que posteriormente formulou o Método Simplex para Programação Linear (Loesch, 1999).

Além do contexto militar, a PO teve influência da Revolução Industrial, quando o aumento da complexidade organizacional demandou novas formas de alocação

eficiente de recursos (Hillier & Lieberman, 2013). O modelo universal da PO utiliza a matemática para definir objetivos, variáveis e restrições, permitindo otimizar processos em setores como manufatura, transporte e planejamento financeiro (Montevechi, 2013; Moraes *et al.*, 2019).

A PO emprega métodos científicos para apoiar a tomada de decisão, considerando fatores econômicos e operacionais (Andrade, 2000; Ragsdale, 2009). A aplicabilidade da PO reside na modelagem matemática para resolver problemas complexos, sendo uma ferramenta essencial para gestores na busca por soluções ótimas e adaptáveis às mudanças (Belfiore e Fávero, 2013; Hillier e Lieberman, 2013).

2.2 Programação Linear (PL)

A Programação Linear (PL), uma área da PO, é um dos avanços tecnológicos do século XX, possibilitando a otimização de custos e a maximização de lucros nas organizações (Botelho *et al.*, 2023; Latipova, 2015). Segundo esses autores, o desenvolvimento da PL foi impulsionado pela evolução da teoria matemática e dos recursos computacionais.

A PL busca maximizar ou minimizar uma função linear sujeita a restrições, sendo amplamente aplicada, por exemplo, em Engenharia, Economia e Logística (Moreira, 2010; Lachtermacher, 2009; Hein & Loesch, 2009). A formulação matemática da PL envolve 3 elementos essenciais: variáveis de decisão, função objetivo e restrições (Hillier & Lieberman, 2013).

Entre os métodos de solução de um problema de PL, destaca-se o Método Simplex, amplamente utilizado devido à sua eficácia na resolução de problemas complexos (Barba, 2013). O uso de *softwares*, como o Solver do MS-Excel®, torna a implementação da PL mais acessível e eficiente na tomada de decisões gerenciais (Montini, 2004; Santos & Afonso, 2019).

2.3 Estudos anteriores

A aplicação da PO na otimização de processos e recursos tem sido amplamente estudada em diferentes setores, como indústria, telecomunicações e varejo. No entanto, poucos trabalhos se concentram na aplicação específica dessa abordagem para CFCs, um setor regulado e altamente competitivo que enfrenta desafios na alocação eficiente de recursos, como veículos, instrutores e infraestrutura. Para compreender o estado da arte sobre a otimização financeira e operacional em diversos contextos, são apresentados alguns dos principais estudos que aplicam modelos matemáticos de otimização a problemas reais.

Souza (2021) abordou o Problema de Atribuição do Detran (PAD) que trata da distribuição equitativa e imparcial de exames clínicos e/ou psicológicos aos processos do departamento de trânsito de Alagoas. O PAD é uma variante do Problema de Atribuição, visando alocar condutores a clínicas, minimizando o custo total de deslocamento e respeitando a restrição de equidade entre as clínicas. Dois modelos de otimização foram propostos: o primeiro resolve o PAD, minimizando a distância total, e o segundo, chamado PAD⁺, sugere a localização de uma nova clínica. Um modelo de classificação com redes neurais é utilizado para inferir bairros aos condutores. Os resultados indicam que o modelo PAD reduziu o custo de deslocamento em 30,07%, enquanto o PAD⁺ sugeriu uma nova localidade com redução de até 67,16%. Essa pesquisa também incluiu uma análise de sensibilidade para determinar as localidades que mais influenciam no deslocamento dos

candidatos. Esse estudo reforça a importância da otimização no setor de trânsito, ainda que focado em um problema diferente dos CFCs.

No setor industrial, Carmo *et al.* (2023) aplicaram a PL para maximizar o lucro em uma fábrica de velas. Após levantamento de dados por meio de questionários, foi desenvolvido um modelo matemático que representou as restrições e objetivos da empresa. A solução foi encontrada utilizando o Solver do Excel, a qual indicou um potencial aumento de 15% no lucro, evidenciando que o principal gargalo do processo estava na disponibilidade de capital.

Silva *et al.* (2023) utilizaram PL para otimizar a distribuição de clientes entre os planos de telefonia móvel de uma operadora em Mossoró/RN, visando maximizar a receita. A pesquisa foi dividida em quatro etapas: coleta de dados, construção do modelo matemático, validação do modelo e implementação. A solução encontrada alocou 94.036 clientes nos planos, gerando uma receita mensal de R\$ 3.555.756,63, demonstrando que a infraestrutura existente era suficiente para atender à demanda, mas destacando a necessidade de monitoramento contínuo.

No setor alimentício, Alfaia *et al.* (2023) desenvolveram um modelo matemático linear para maximizar o lucro de uma panificadora em Belém/PA. Utilizando o Solver do Excel, a solução encontrou o nível ideal de produção diária de pão francês e pão de hambúrguer, reduzindo desperdícios e otimizando a compra de insumos. Da mesma forma, Botelho *et al.* (2023) aplicaram PL para maximizar o lucro na produção de pães em uma panificadora em Castanhal/PA. A modelagem revelou desperdícios significativos de insumos, levando à proposição de um plano de compras capaz de reduzir custos e melhorar a rentabilidade.

Spinelli *et al.* (2023) também exploraram a otimização na gestão de um negócio alimentício, aplicando PL para aprimorar o plano de compras de uma doceria em Belém/PA. O modelo matemático foi resolvido com suporte do Solver do Excel, buscando minimizar custos. O modelo conseguiu reduzir custos, aumentar o lucro e otimizar o tempo no processo de compras. A solução ótima indicou um custo ideal de R\$ 15.527,67, destacando a necessidade de revisão periódica do planejamento, expansão da otimização para toda a cadeia de insumos, busca por fornecedores alternativos e aprimoramento da previsão de demanda e do estoque de segurança.

No setor da construção civil, Almeida *et al.* (2023) utilizaram um modelo de PL para a análise das limitações de uma indústria de concreto usinado em Bragança/PA com o objetivo de maximizar o lucro. A pesquisa identificou restrições na quantidade de veículos, matérias-primas e capital. O modelo contribuiu na decisão de atender clientes considerando as limitações de recursos e alta demanda, visando a maximização do lucro. Os resultados apontaram os clientes que proporcionariam o lucro máximo semanal, o valor desse lucro e as quantidades de recursos semanais necessárias, evitando sobras, excessos e identificando gargalos no processo.

3. METODOLOGIA

3.1 Caracterizando da pesquisa

O presente estudo caracteriza-se como uma pesquisa aplicada, que, segundo Rodrigues (2007), busca a resolução de problemas específicos por meio da aplicação prática de teorias e modelos. Essa pesquisa foca na aplicação de um modelo matemático de otimização em um CFC, com o objetivo de otimização do resultado financeiro. A pesquisa aplicada, visa gerar soluções imediatas e concretas para situações do mundo real, oferecendo contribuições diretas para a prática da gestão de CFCs.

A metodologia adota uma abordagem quantitativa, que se baseia na análise de dados numéricos e na mensuração de variáveis envolvidas no processo de formação de condutores. Conforme Beuren (2012), a pesquisa quantitativa é adequada para o tratamento de grandes volumes de dados e permite a aplicação de modelagem matemática, como a PL, que será a técnica utilizada para formular e resolver o problema específico.

Em termos de seus objetivos, a pesquisa é explicativa, pois visa fornecer uma compreensão detalhada das relações causais entre os fatores que afetam a lucratividade de um CFC. De acordo com Gil (2002), a pesquisa explicativa é adequada quando o objetivo é investigar os "porquês" e "como" de um fenômeno, buscando explicar as causas subjacentes que determinam os resultados observados.

A obtenção de informações será realizada por meio de dados primários e secundários, que incluem relatórios financeiros, documentos oficiais de órgãos reguladores como DETRAN e CONTRAN e dados do estudo de caso no qual será testado o modelo desenvolvido. O estudo de caso será baseado em um CFC localizado na região Sudoeste do Paraná. O estudo de caso proporciona um aprofundamento prático, permitindo a aplicação do modelo de PL em um contexto real (Gil, 2002). Segundo Yin (2015), o estudo de caso é uma abordagem eficaz para investigar processos e decisões em um ambiente específico, fornecendo uma visão detalhada sobre a implementação de um modelo de otimização. O caso estudado permitirá validar o modelo desenvolvido e ajustar as variáveis e restrições de acordo com a realidade operacional do CFC.

Para a resolução do modelo de otimização, será utilizado o *software* MS-Excel, juntamente com o Solver, uma ferramenta integrada que permite resolver problemas de otimização.

O estudo utilizará modelagem matemática, especificamente a técnica de PL, para desenvolver um modelo de otimização do resultado financeiro de um CFC. A PL é uma ferramenta poderosa para a resolução de problemas de otimização (Rodrigues, 2007). O modelo será formulado com base nas variáveis custo, receita, capacidade e demanda, permitindo a identificar o resultado (lucro ou prejuízo), que pode ser alcançado dentro das condições operacionais do CFC.

3.2 Estudo de caso

O presente estudo de caso aborda uma instituição localizada na região Sudoeste do estado do Paraná, Brasil, que se dedica à formação e capacitação de condutores. Atuando como um CFC, a empresa desempenha um papel essencial na promoção de um trânsito mais seguro e na formação de motoristas preparados, contribuindo diretamente para a mobilidade e segurança viária.

A principal atividade da instituição é a oferta de cursos para obtenção da habilitação nas categorias A, B e AB, que abrangem, respectivamente, a condução de motocicletas, automóveis e a combinação desses veículos. Além disso, a empresa oferece serviços complementares como a inclusão de Categoria A, para condutores já habilitados em outras categorias, e a alteração para Categoria C, destinada à condução de veículos de maior porte, como caminhões.

A atuação do CFC está totalmente alinhada às normas e diretrizes estabelecidas pelo CONTRAN, garantindo que o processo de formação de condutores atenda aos mais altos padrões de qualidade e legalidade. Esse compromisso com a regulamentação e a excelência permite à empresa habilitar novos motoristas, proporcionar oportunidades de atualização e ampliação de categorias, contribuindo para a inserção dos condutores no mercado de trabalho.

3.3 Modelo de programação linear

As variáveis de decisão deste estudo, denotadas por X_1 a X_5 , estão diretamente associadas aos serviços ofertados pelo CFC, representando a quantidade de alunos atendidos em cada tipo de serviço. Essas variáveis refletem as principais atividades realizadas pelo CFC e são definidas da seguinte forma: Categoria A (X_1) - quantidade de alunos matriculados para 1ª habilitação na categoria de motocicletas e similares; Categoria B (X_2) - quantidade de alunos matriculados para 1ª habilitação na categoria de automóveis e similares; Categoria AB (X_3) - quantidade de alunos matriculados para 1ª habilitação na categoria combinada de motocicletas e automóveis; Inclusão de Categoria A (X_4) - quantidade de alunos que já possuem habilitação em outras categorias e buscam incluir a Categoria A; Alteração de Categoria C (X_5) - quantidade de alunos que realizam a alteração para a Categoria C, habilitando-se para conduzir veículos de maior porte.

Assim, X_i representam as variáveis de decisão, ou seja, o número de alunos atendidos em cada tipo de serviço/categoria. Os índices $i = 1, 2, 3, 4, 5$ correspondem às diferentes categorias oferecidas pelo CFC.

Essas variáveis têm um papel central no modelo de otimização proposto, pois permitem traduzir os serviços oferecidos pelo CFC em elementos quantificáveis, essenciais para a análise e gestão eficiente da instituição. Por meio da PL, essas variáveis são utilizadas na construção de um modelo que busca otimizar o resultado financeiro do CFC.

A Função Objetivo (FO) deste modelo foi desenvolvida com o propósito de otimizar o resultado financeira de um CFC, considerando as principais fontes de receita e custos relacionados às operações. A formulação incorpora as variáveis de decisão, os valores monetários associados a cada serviço e os ajustes necessários para contemplar aulas extras e taxas de reprovação. Além disso, o modelo considera os custos fixos da instituição, garantindo uma visão abrangente do desempenho financeiro. A FO está representada na Equação (01):

$$FO = MC_1 \cdot X_1 + MC_2 \cdot X_2 + MC_3 \cdot X_3 + MC_4 \cdot X_4 + MC_5 \cdot X_5 + MCAE_1 \cdot \%AE_1 \cdot (X_1 + X_3 + X_4) + MCAE_2 \cdot \%AE_2 \cdot (X_2 + X_3) + MCAE_5 \cdot \%AE_5 \cdot X_5 + MCR_1 \cdot \frac{\%R_1}{1 - \%R_1} \cdot (X_1 + X_3 + X_4) + MCR_2 \cdot \frac{\%R_2}{1 - \%R_2} \cdot (X_2 + X_3) + MCR_5 \cdot \frac{\%R_5}{1 - \%R_5} \cdot X_5 - CF \quad (01)$$

Em que: MC_i = margem de contribuição da categoria i ; X_i = quantidade de matrículas da categoria i ; $MCAE_1$ = margem de contribuição de aula extra da categoria 1; $\%AE_1$ = percentual de aulas extras da categoria 1; $MCAE_2$ = margem de contribuição de aula extra da categoria 2; $\%AE_2$ = percentual de aulas extras da categoria 2; $MCAE_5$ = margem de contribuição de aula extra da categoria 5; $\%AE_5$ = percentual de aulas extras da categoria 5; MCR_1 = margem de contribuição de aula extra da categoria 1; $\%R_1$ = percentual de reprovação da categoria 1; MCR_2 = margem de contribuição de aula extra da categoria 2; $\%R_2$ = percentual de reprovação da categoria 2; MCR_5 = margem de contribuição de aula extra da categoria 5; $\%R_5$ = percentual de reprovação da categoria 5; CF = Custos fixos. Para determinar o total de reprovados foi utilizado uma progressão geométrica cuja razão é igual a taxa de reprova histórica de cada categoria.

As receitas diretas do CFC são calculadas por meio do primeiro termo da Equação (01), o qual está representado na Equação (02):

$$MC_1 \cdot X_1 + MC_2 \cdot X_2 + MC_3 \cdot X_3 + MC_4 \cdot X_4 + MC_5 \cdot X_5 = \sum_{i=1}^5 MC_i \cdot X_i \quad (02)$$

O parâmetro MC_i refere-se a margem de contribuição em cada tipo de serviço i . O produto $MC_i \cdot X_i$ calcula a receita obtida com o serviço i . A soma de todos os serviços ($i = 1, 2, \dots, 5$) fornece a receita direta gerada pelo CFC.

As receitas de aulas extras (AE) estão alocados no segundo termo da Equação (01), destacado na Equação (03):

$$MCAE_1 \cdot \%AE_1 \cdot (X_1 + X_3 + X_4) + MCAE_2 \cdot \%AE_2 \cdot (X_2 + X_3) + MCAE_5 \cdot \%AE_5 \cdot X_5 \quad (03)$$

calcula as receitas adicionais provenientes de aulas extras realizadas pelos alunos, correspondendo a quantidade de aulas multiplicada pelo valor de cada aula, considerando os serviços que demandam esse recurso.

As receitas por reprovação estão no terceiro termo da Equação (01), destacado na Equação (04):

$$MCR_1 \cdot \frac{\%R_1}{1-\%R_1} \cdot (X_1 + X_3 + X_4) + MCR_2 \cdot \frac{\%R_2}{1-\%R_2} \cdot (X_2 + X_3) + MCR_5 \cdot \frac{\%R_5}{1-\%R_5} \cdot X_5 \quad (04)$$

computa as receitas relacionadas a tentativas adicionais decorrentes de reprovações, ajustadas para refletir as taxas de sucesso e reprovação.

O último termo da equação (01) indica o custo fixo (CF), sendo negativo por indicar uma saída de caixa. O CF representa os custos operacionais que a instituição precisa cobrir, independente da quantidade de alunos atendidos. A rubrica CF inclui aluguel, salários de funcionários administrativos, manutenção de infraestrutura, entre outras despesas recorrentes.

3.4 Restrições

No modelo proposto para a otimização do resultado financeiro de um CFC, é necessário considerar as restrições que garantam a diversificação e a oferta proporcional das habilitações disponíveis.

Percentual Mínimo por Categoria de Habilitação: O primeiro conjunto de restrições do modelo busca garantir que as matrículas em cada categoria de habilitação respeitem os percentuais mínimos previamente estabelecidos com base em dados históricos, em relação ao total de alunos registrados no período considerado. Essa condição assegura um equilíbrio no atendimento às diferentes categorias de habilitação oferecidas no CFC. Matematicamente, essas restrições são expressas nas Inequações (05) a (09):

$$R1a: X_1 \geq \%PMA \cdot (X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5) \quad (05)$$

$$R1b: X_2 \geq \%PMB \cdot (X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5) \quad (06)$$

$$R1c: X_3 \geq \%PMAB \cdot (X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5) \quad (07)$$

$$R1d: X_4 \geq \%PMIA \cdot (X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5) \quad (08)$$

$$R1e: X_5 \geq \%PMC \cdot (X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5) \quad (09)$$

Em que: $\%PMA$ é o percentual mínimo de primeira habilitação de categoria A; $\%PMB$ é o percentual mínimo de primeira habilitação de categoria B; $\%PMAB$ é o percentual mínimo de primeira habilitação de categoria A e B; o $\%PMIA$ é o percentual mínimo de inclusão de categoria A; e $\%PMC$ = percentual mínimo de alteração de categoria C.

Percentual Máximo por Categoria de Habilitação: O segundo conjunto de restrições do modelo estabelece que a participação de alunos em cada categoria de habilitação não deve ultrapassar os limites percentuais máximos definidos com base no histórico de demandas do CFC. Esses percentuais refletem o padrão histórico de procura por categorias específicas, auxiliando na manutenção de uma alocação equilibrada de recursos e na prevenção de sobrecarga em determinadas áreas operacionais. Essas restrições estão expressas nas Inequações (10) a (14):

$$R2a: X_1 \leq \%PXA \cdot (X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5) \quad (10)$$

$$R2b: X_2 \leq \%PXB \cdot (X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5) \quad (11)$$

$$R2c: X_3 \leq \%PXAB \cdot (X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5) \quad (12)$$

$$R2d: X_4 \leq \%PXIA \cdot (X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5) \quad (13)$$

$$R2e: X_5 \leq \%PXC \cdot (X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5) \quad (14)$$

Sendo: $\%PXA$ o percentual máximo de primeira habilitação de categoria A; $\%PXB$ o percentual máximo de primeira habilitação de categoria B; $\%PXAB$ o percentual máximo de primeira habilitação de categoria A e B; $\%PXIA$ o percentual máximo de inclusão de categoria A; e $\%PXC$ o percentual máximo de alteração de categoria C.

Quantidade de Horas Disponíveis por Veículo: O terceiro conjunto de restrições do modelo busca garantir que a utilização dos veículos no CFC ocorra de forma eficiente, respeitando a disponibilidade de horas de operação de cada veículo, em um determinado período. Essa restrição considera a quantidade de veículos disponíveis e o tempo máximo que cada um pode ser alocado para atividades práticas, como aulas de direção, atendendo às demandas dos alunos e às condições operacionais do CFC.

Para realizar o cálculo da quantidade de horas disponíveis por veículo, são definidos seis parâmetros fundamentais. Esses parâmetros permitem quantificar de maneira precisa os limites de uso, considerando a disponibilidade de veículos e a carga horária destinada às atividades.

Quantidade de Aulas Obrigatórias por Categoria: O primeiro conjunto de parâmetros refere-se à quantidade de aulas obrigatórias que cada categoria deve cumprir, conforme as regulamentações vigentes. Esses valores determinam a carga mínima de treinamento necessário para cada tipo de habilitação, sendo QA_1 a quantidade de aulas obrigatórias para primeira habilitação de categoria A, QA_2 a quantidade de aulas obrigatórias para primeira habilitação de categoria B, QA_3 a quantidade de aulas obrigatórias para inclusão de categoria A, e QA_4 a quantidade de aulas obrigatórias para alteração de categoria C.

Percentual de Aulas Extras: Este parâmetro considera a realização de aulas extras pelos alunos, além da carga obrigatória, para treinamento adicional. Os dados são expressos em percentuais, com base no histórico do CFC. Caso não haja aulas extras, o valor deve ser informado como zero. Sendo $\%AE_1$ o percentual de aulas extras para moto, $\%AE_2$ o percentual de aulas extras para carro, e $\%AE_3$ o percentual de aulas extras para caminhão.

Percentual de Reprovação nos Exames Práticos: Com base em dados históricos do CFC, este parâmetro reflete o percentual de alunos reprovados nos exames práticos, na qual $\%R_1$ é o percentual de reprovação para moto, $\%R_2$ o percentual de reprovação para carro, e $\%R_3$ o percentual de reprovação para caminhão.

Quantidade de Veículos Disponíveis: A quantidade de veículos disponíveis no CFC deve atender às normas regulamentares, que estipulam um número mínimo para o adequado atendimento aos alunos. Para isso, QV_1 é a quantidade de motos, QV_2 a quantidade de carros e QV_3 a quantidade de caminhões.

Quantidade Máxima de Horas Disponíveis por Veículo: Esse parâmetro define a quantidade máxima de horas que cada veículo pode ser utilizado em um período específico para a realização de aulas práticas, na qual QHV_1 é a quantidade de horas de cada veículo moto, QHV_2 quantidade de horas de cada veículo carro e QHV_3 quantidade de horas de cada veículo carro.

Quantidade de Horas para Exames Práticos: Este parâmetro estabelece a quantidade de horas necessárias para a realização dos exames práticos de direção,

considerando cada tipo de veículo, sendo QAT_1 a quantidade de horas para exames de moto, QAT_2 quantidade de horas para exames de carro e QAT_3 quantidade de horas para exames de caminhão.

Função de Ajuste para Cálculo da Necessidade de Recursos de Horas Disponíveis da Frota: A reprovação nos exames práticos de direção gera a necessidade de retestes, aumentando a demanda sobre os recursos da frota de veículos do CFC. Para lidar com essa dinâmica, foi desenvolvida uma função que ajusta diretamente a quantidade de horas necessárias com base no percentual de reprovação dos alunos. Essa função permite calcular, de forma precisa, os recursos de horas disponíveis que serão exigidos para atender à demanda total, incluindo as tentativas adicionais necessárias até a aprovação dos alunos. A função é expressa pela Equação (15):

$$\text{Fator de ajuste} = \text{Categoria} \cdot \text{Horas necessarias para teste} \cdot \left(\frac{\%R}{1-\%R} \right) \quad (15)$$

Na qual, *categoria* identifica a categoria de habilitação em questão (ex.: A, B, C), *Horas necessárias para teste* representa o tempo alocado para a realização de cada exame prático e $\%R$ percentual de reprovação nos exames práticos, baseado em dados históricos do CFC.

A Equação 15 ajusta iterativamente a quantidade de horas necessárias para atender à demanda de alunos aprovados. À medida que o percentual de reprovação ($\%R$) aumenta, a quantidade de horas exigidas também cresce, refletindo a maior necessidade de horas disponíveis e recursos. O ajuste é feito até que o número de alunos restantes seja inferior a 1, garantindo que todas as reprovações sejam contabilizadas. O principal objetivo desta função é calcular a necessidade direta de recursos de horas disponíveis da frota de veículos do CFC, assegurando que a capacidade operacional seja suficiente para atender à demanda.

Otimização da Frota de Veículos do CFC – Restrições por Tipo de Veículo: Para garantir o uso eficiente da frota do CFC, composta por motos, carros e caminhões, foram definidas três restrições específicas alocadas nas Equações 16, 17 e 18. Essas restrições utilizam os dados e parâmetros definidos anteriormente e têm como objetivo otimizar a alocação de recursos, respeitando os limites operacionais de cada tipo de veículo.

Cada restrição considera as variáveis de decisão associadas às categorias de habilitação, além de incluir o impacto das aulas obrigatórias, aulas extras e retestes, conforme detalhado a seguir:

- R3a: restrição da quantidade de aulas disponível para motos. Essa restrição considera as seguintes variáveis de decisão: X_1, X_3 , e X_4 . Essa restrição está detalhada na Inequação 16:

$$\text{R3a: } QA_1 \cdot X_1 + QA_3 \cdot X_4 + QA_1 \cdot X_3 + (QA_1 \cdot X_1 + QA_3 \cdot X_4 + QA_1 \cdot X_3) \cdot \%AE_1 + (X_1 + X_3 + X_4) \cdot QAT_1 \cdot \left(\frac{\%R_1}{1-\%R_1} \right) \leq QHV_1 \cdot QV_1 \quad (16)$$

Essa Equação combina as aulas obrigatórias (QA_1, QA_3), as aulas extras ($\%AE_1$) e as horas necessárias para retestes (QAT_1) de acordo com o percentual de reprovação ($\%R_1$), ajustando o total com a disponibilidade máxima da frota de motos ($QHV_1 \cdot QV_1$).

- R3b: restrição da quantidade de aulas disponível para carros. Essa restrição considera as seguintes variáveis de decisão: X_2 e X_3 . Essa restrição está detalhada na Equação 17:

$$\text{R3b: } QA_2 \cdot X_2 + QA_2 \cdot X_3 + (QA_2 \cdot X_2 + QA_3 \cdot X_3) \cdot \%AE_2 + (X_2 + X_3) \cdot QAT_2 \cdot \left(\frac{\%R_2}{1-\%R_2} \right) \leq QHV_2 \cdot QV_2 \quad (17)$$

Essa Equação combina as aulas obrigatórias (QA_2), as aulas extras (AEX_2) e as horas necessárias para retestes (QAT_2) de acordo com o percentual de reprovação ($\%R_2$), ajustando o total com a disponibilidade máxima da frota de motos ($QHV_2 \cdot QV_2$).

- R3c: restrição da quantidade de aulas disponível para caminhões. Essa restrição considera a variável de decisão X_5 . Essa restrição está detalhada na Inequação 18:

$$R3c: QA_4 \cdot X_5 + (QA_4 \cdot X_5) \cdot \%AE_3 + X_5 \cdot QAT_3 \cdot \left(\frac{\%R_3}{1 - \%R_3} \right) \leq QHV_3 \cdot QV_3 \quad (18)$$

A Equação 18 combina as aulas obrigatórias (QA_4), as aulas extras (AEX_3) e as horas necessárias para retestes (QAT_3) de acordo com o percentual de reprovação ($\%R_3$), ajustando o total com a disponibilidade máxima da frota de motos ($QHV_3 \cdot QV_3$).

Capacidade das Turmas Teóricas: No modelo proposto, é importante incluir uma restrição relacionada à quantidade de alunos matriculados por mês em comparação com a capacidade das turmas teóricas oferecidas. Para garantir que a oferta de turmas esteja alinhada com a demanda de alunos, estabelece-se uma restrição que determina que o total de alunos matriculados em um mês deve ser distribuído entre as turmas teóricas disponíveis, respeitando a capacidade máxima de alunos por turma.

Essa restrição assegura que o número de alunos por turma não exceda o limite máximo permitido, que é definido conforme as dimensões das salas de aula, seguindo as regulamentações estabelecidas pelo Detran por meio de portarias específicas. Isso evita superlotação e garante a qualidade do ensino teórico, além de possibilitar um planejamento eficiente do número de turmas necessárias. Assim, otimiza-se a utilização de recursos como instrutores, salas e materiais, mantendo ao mesmo tempo a conformidade com as normas vigentes e a qualidade do serviço oferecido pelo CFC.

Os parâmetros criados para esta restrição são: (i) QTM para a quantidade de turmas teóricas por período (mês); (ii) CSA é a capacidade de alunos na sala de aula; e (iii) SN se o CFC tem curso teórico? Sim (1), Não (0). Nesta restrição, são consideradas as seguintes variáveis de decisão: X_1, X_2 e X_3 . Essa restrição está detalhada na Inequação (19):

$$R4: X_1 + X_2 + X_3 \leq QTM \cdot CSA \cdot SN \quad (19)$$

Disponibilidade de horas do instrutor teórico: Essa restrição garante que o total de horas necessárias para as aulas teóricas não ultrapasse a disponibilidade de horas dos instrutores. Com isso, assegura que o planejamento de turmas mensais e a quantidade de aulas sejam viáveis em relação aos recursos de instrutores disponíveis, mantendo o modelo realista e operável.

Nesse contexto, os parâmetros criados foram: (i) QTM para a quantidade de turma por mês, representa o número de turmas que o CFC planeja abrir para o curso teórico a cada mês; (ii) AT é a quantidade de aulas do curso teórico: representa o número de aulas que cada turma teórica necessita no período; (iii) SN é uma variável binária que indica se o CFC oferece curso teórico: se o CFC oferece ($SN = 1$), esta restrição é ativada, ou seja, precisa ser satisfeita; caso contrário ($SN = 0$), a restrição não tem efeito; e (iv) QHI é a quantidade de horas de instrutor disponível, representa o total de horas disponíveis de instrutores para cobrir as aulas teóricas durante o período em questão. Essa restrição está representada pela Inequação (20).

$$R5: QTM \cdot AT \cdot SN \leq QHI \quad (20)$$

Capacidade Total de Aulas dos Instrutores: A restrição R6 avalia a quantidade total de aulas necessárias com base nas variáveis de decisão e verifica se essa demanda é compatível com a disponibilidade de horas dos instrutores do CFC.

Esse controle é essencial para assegurar que a carga horária total das aulas práticas não ultrapasse os limites operacionais dos instrutores.

Nesta restrição, são consolidadas as três últimas restrições apresentadas (R3a, R3b, R3c), as quais representam a demanda de aulas para motos, carros e caminhão, respectivamente. Todas os parâmetros utilizados nessas restrições serão integrados em uma única equação. O resultado será comparado à capacidade de horas disponíveis dos instrutores, considerando possíveis ajustes operacionais. Essa restrição está representada pela Inequação (21).

$$R6: QA_1 \cdot X_1 + QA_3 \cdot X_4 + QA_1 \cdot X_3 + (QA_1 \cdot X_1 + QA_3 \cdot X_4 + QA_1 \cdot X_3) \cdot \%AE_1 + (X_1 + X_3 + X_4) \cdot QAT_1 \cdot \left(\frac{\%R_1}{1-\%R_1}\right) + QA_2 \cdot X_2 + QA_2 \cdot X_3 + (QA_2 \cdot X_2 + QA_3 \cdot X_3) \cdot \%AE_2 + (X_2 + X_3) \cdot QAT_2 \cdot \left(\frac{\%R_2}{1-\%R_2}\right) + QA_4 \cdot X_5 + (QA_4 \cdot X_5) \cdot \%AE_3 + X_5 \cdot QAT_3 \cdot \left(\frac{\%R}{1-\%R_3}\right) \leq QHI - (QTM \cdot AT \cdot SN) \quad (21)$$

4. RESULTADOS

Para o cálculo da solução ótima, foram utilizados os dados históricos do CFC descrito na seção 3.2, consolidados em três Quadros 01, 02, e 03 os quais apresentam dados de entrada essenciais para a execução do modelo matemático. Esses dados refletem a operação prática do CFC e foram organizados com base em registros anteriores de desempenho financeiro, operacional e de infraestrutura.

O Quadro 01 contém as margens de contribuição (MC) por categoria, segmentadas em matrículas realizadas, aulas extras e retestes práticos. Esses valores são retirados da tabela de custos da empresa e são fundamentais para avaliar o impacto financeiro de cada atividade, contribuindo diretamente para a otimização do resultado financeiro do CFC.

Variáveis de decisão	Margem de contribuição das matrículas realizadas		Margem de contribuição das aulas extras realizadas		Margem de contribuição dos retestes práticos realizadas	
	Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor
Categoria A	MC1	R\$ 1.487,02	MCa1	R\$ 66,78	MCr1	R\$ 237,82
Categoria B	MC2	R\$ 1.794,37	MCa2	R\$ 77,00	MCr2	R\$ 242,75
Categoria AB	MC3	R\$ 2.280,76				
Inclusao cat A	MC4	R\$ 836,15				
Alteração cat C	MC5	R\$ 759,01				
			MCa3	R\$ 89,76	MCr3	R\$ 248,82

Quadro 01. Margens de contribuição. Fonte: Elaborado pelos autores.

O Quadro 02 apresenta as informações operacionais obtidas a partir do histórico do CFC, incluindo a quantidade de aulas obrigatórias por categoria, percentuais de aulas extras realizadas pelos alunos, índices de reprovação em exames práticos, quantidade de veículos disponíveis, e limites percentuais mínimo e máximo de distribuição por categoria. Esses dados refletem o padrão de operação e a demanda histórica do CFC.

Variáveis de decisão	Quantidade de aulas por categorias		Percentual de aulas extras		Percentual de reprovação exames práticos		Quantidade de veículos disponíveis		Quantidade de horas por veículo mês		Quantidade de horas para exames práticos		% mínimo do total de cada categoria		% máximo do total de cada categoria	
	Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor
Categoria A	Qa1	20	Aex1	2%	RT1	20%	Qv1	2	Qhv1	352	Qat1	1	Pma	5%	Pxa	10%
Categoria B	Qa2	20	Aex2	5%	RT2	40%	Qv2	2	Qhv2	352	Qat2	1	Pmb	15%	Pxb	40%
Categoria AB													Pmab	20%	Pxab	55%
Inclusao cat A	Qa3	15											Pmia	5%	Pxia	10%
Alteração cat C	Qa4	20	Aex3	0%	RT3	0%	Qv3	1	Qhv3	352	Qat3	1	Pmc	5%	Pxc	20%

Quadro 02. Informações operacionais. Fonte: Elaborado pelos autores.

Por fim, o Quadro 03 descreve os parâmetros relacionados à infraestrutura e a capacidade operacional, como a quantidade mensal de turmas, a capacidade das salas de aula, a carga horária total dos cursos teóricos e o total de horas disponíveis dos instrutores. Esses números também são baseados nos registros históricos do CFC, garantindo que o modelo reflita a realidade da instituição.

Descrição	Parâmetro	Valor
Quantidade de turma por mês	Q_{tm}	2
Capacidade da sala de aula	C_{sa}	15
Quantidade de aula curso	A_t	45
Quant. de horas de instrutor	Q_{hi}	442
O CFC tem curso teórico? Sim	SN	1

Quadro 03. Parâmetros de infraestrutura. Fonte: Elaborado pelos autores.

Esses dados históricos serviram como base para a construção das restrições e para a formulação do modelo de otimização. A partir deles, foi possível determinar a solução ótima que maximiza o resultado financeiro do CFC, respeitando as limitações e especificidades operacionais estabelecidas ao longo do tempo.

Após a substituição dos dados históricos e operacionais no modelo matemático, foi possível encontrar a solução que otimiza o resultado financeiro do CFC. A função objetivo atingiu um valor ótimo de R\$ 10.626,48, representando o lucro máximo estimado por mês, levando em consideração todas as restrições operacionais, de infraestrutura e as margens de contribuição por categoria.

As variáveis de decisão apresentaram os seguintes resultados:

Variável X_1 (categoria A) = 1 matrículas por mês; variável X_2 (categoria B) = 4; variável X_3 (categoria AB) = 4; variável X_4 (inclusão de categoria A) = 1 e variável X_5 (alteração de categoria C) = 2

5. CONCLUSÕES E DISCUSSÕES

A conclusão deste estudo reafirma a relevância da aplicação da PO como ferramenta para a otimização dos resultados financeiros de CFCs. Partindo da pergunta central delineada na introdução, “como estruturar um modelo matemático que maximize o lucro de um CFC, respeitando as suas especificidades operacionais e legais”, o presente trabalho apresentou uma abordagem robusta e adaptada à realidade de um CFC específico. O objetivo principal foi alcançado ao propor um modelo matemático que considera tanto as variáveis de decisão associadas aos serviços oferecidos quanto as restrições legais e operacionais vigentes.

A função objetivo alcançou um lucro líquido máximo mensal de R\$ 10.626,48, refletindo o potencial financeiro do CFC ao otimizar a combinação de serviços oferecidos e recursos disponíveis. Este resultado é o produto de uma formulação que considera todas as principais fontes de receita, como matrículas realizadas, aulas extras e retestes práticos, descontando os custos fixos associados à operação.

O modelo matemático é versátil e adaptável, permitindo ajustes nos parâmetros, como taxas de reprovação, margens de contribuição e custos fixos, para refletir as particularidades de diferentes CFCs. Essa flexibilidade torna o modelo replicável em diferentes cenários operacionais, fornecendo ao gestor uma base sólida para a tomada de decisões estratégicas.

O modelo proposto incorpora variáveis que capturam a complexidade das operações de um CFC, como a proporção de aulas extras realizadas e a gestão de recursos frente a reprovações. Por meio do uso de técnicas de PL, o modelo integra essas variáveis em uma abordagem estruturada e eficiente, baseada em dados históricos. Assim, o modelo não apenas identifica a melhor combinação de serviços,

mas também orienta o gestor a otimizar o desempenho financeiro sem comprometer a conformidade com os requisitos operacionais e regulamentares.

Os resultados demonstram a capacidade do modelo de equilibrar as demandas financeiras e operacionais do CFC, oferecendo informações sobre a melhor forma de alocar recursos. A predominância de matrículas nas categorias B e AB evidencia a importância dessas modalidades no desempenho financeiro da instituição, enquanto a inclusão de outras categorias garante a diversificação dos serviços e o uso completo da infraestrutura.

O impacto prático do modelo desenvolvido ultrapassa a simples maximização do lucro mensal. A formulação proposta oferece uma estrutura robusta e parametrizável que permite aos gestores de CFCs identificarem gargalos operacionais — como a insuficiência de veículos ou a limitação de horas dos instrutores — e, a partir disso, ajustarem o planejamento de forma mais precisa. Um dos principais méritos do modelo está em sua capacidade de integrar múltiplas variáveis decisórias com diferentes fontes de receita (como matrículas, aulas extras e retestes) e um conjunto amplo de restrições operacionais, possibilitando uma visão sistêmica da operação do CFC.

O modelo contribui para a literatura ao aplicar a PL em um setor ainda pouco explorado sob a ótica da PO. Enquanto estudos como os de Carmo et al. (2023) e Alfaia et al. (2023) demonstraram sucesso na maximização de lucros em indústrias alimentícias, este estudo amplia o escopo ao aplicar técnicas similares em uma instituição de ensino regulamentada, com múltiplas limitações legais e operacionais. Tal abordagem, centrada na personalização das restrições conforme a realidade do CFC, diferencia este trabalho dos demais e fortalece seu caráter prático e inovador.

Entretanto, algumas limitações devem ser reconhecidas. Primeiramente, o modelo foi desenvolvido com base nos dados operacionais de um único CFC localizado na região Sudoeste do Paraná, o que restringe sua generalização imediata para outras instituições. Embora a estrutura matemática seja replicável, os parâmetros devem ser recalibrados para refletir a realidade de cada CFC, respeitando variações regionais, regulatórias e de mercado.

Por fim, a análise de sensibilidade do modelo, embora não tenha sido explorada nesta versão do estudo, apresenta um caminho promissor. A avaliação do impacto de mudanças nos parâmetros — como variação nas taxas de reprovação, custos fixos ou capacidade de turmas — pode oferecer aos gestores uma ferramenta ainda mais poderosa de simulação e apoio à decisão.

O impacto prático do modelo vai além da maximização do lucro, pois ele também oferece uma base estruturada para identificar gargalos operacionais, como a necessidade de contratação de novos instrutores ou a expansão da frota de veículos. Essas questões podem ser analisadas com maior profundidade por meio da análise de sensibilidade, que permite avaliar como alterações nos parâmetros do modelo — como disponibilidade de recursos ou demanda por serviços — afetam a solução ótima, auxiliando na tomada de decisões estratégicas frente a diferentes cenários.

Como sugestão para estudos futuros, recomenda-se a ampliação do modelo desenvolvido, utilizando softwares mais robustos como LINGO, GAMS ou Python com bibliotecas de otimização, capazes de lidar com a complexidade do problema. Além disso, seria pertinente aplicar o modelo em múltiplos CFCs com diferentes perfis operacionais e localizações geográficas, a fim de validar sua generalização e adaptabilidade. A inclusão de variáveis relacionadas à sazonalidade da demanda, custos variáveis com combustíveis, manutenção e inadimplência também pode enriquecer o modelo. Outra vertente promissora envolve a utilização de técnicas de

análise de sensibilidade e simulação de cenários, possibilitando maior suporte à tomada de decisão frente a incertezas operacionais e econômicas. Por fim, integrar indicadores de desempenho não financeiros, como satisfação dos alunos e qualidade do ensino, pode oferecer uma abordagem mais holística à gestão estratégica dos CFCs.

REFERÊNCIAS

- ALFAIA, A. T. T.; FARO, I. S.; SILVA, N. C. V.; SALGADO, T. M.; SANTOS, Y. B. I. (2023 outubro) **Desenvolvimento de modelo matemático para maximização de lucro em uma panificadora**. XLIII Encontro Nacional de Engenharia de Produção. (ENESEP). Fortaleza, Ceará, Brasil, 16 a 19 de outubro de 2023.
- ALMEIDA, J. V. B.; SANTOS, Y. B. I.; COSTA, B. C.; LOBATO, F. S.; NASCIMENTO, K. R. (2023 outubro) **Aplicação da pesquisa operacional para maximização de lucro em uma indústria de concreto usinado**. XLIII Encontro Nacional de Engenharia de Produção. (ENESEP). Fortaleza, Ceará, Brasil, 16 a 19 de outubro de 2023.
- ANDRADE, E. L. (2000) **Introdução à Pesquisa Operacional: Métodos e Modelos para Análise de Decisão**. 2ª Edição, Rio de Janeiro: Ed LTC.
- BARBA, P. V. (2013) **Proposta de aplicação de métodos de pesquisa operacional em uma microempresa do setor comercial do ramo alimentício**. 50 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia de Produção e Sistemas) - Graduação. Centro de Ciências Tecnológicas. Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville.
- BELFIORE, P. FÁVERO, L. P. (2013) **Pesquisa Operacional Para Cursos de Engenharia**. Rio de Janeiro: Elsevier.
- Beuren, I. M. (2012). **Como elaborar trabalhos monográficos em contabilidade**. Atlas.
- BOTELHO, C. C.; DIAS, I. C.; ALVES, L. N.; SANTOS, Y. B. I. (2023 outubro) **Aplicação da pesquisa operacional na maximização de lucro de uma padaria**. XLIII Encontro Nacional de Engenharia de Produção. (ENESEP). Fortaleza, Ceará, Brasil, 16 a 19 de outubro de 2023.
- CARMO, A. P.; SANTOS, B. E. D.; RODRIGUES, R. J. F.; SANTOS, Y. B. I. (2023 outubro) **Maximização do lucro na produção de velas em uma fábrica de Belém**. XLIII Encontro Nacional de Engenharia de Produção. (ENESEP). Fortaleza, Ceará, Brasil, 16 a 19 de outubro de 2023.
- CHAVES, Viviane H. Corrêa. (2011) **Perspectivas históricas da pesquisa operacional. Dissertação (mestrado)** - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências de Rio Claro.
- Gil, A. C. (2002). **Como elaborar projetos de pesquisa**. Atlas.
- GIL, A. C. (1999) **Métodos e Técnicas de Pesquisa Social**. 5. ed. São Paulo: Atlas.
- GOLDBARG, M. C.; Luna, P. H. (2005) **Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos**. 2.ed. – Rio de Janeiro: Elsevier.
- HEIN, N.; LOESCH, C. (2009) **Pesquisa operacional: Fundamentos e Modelos**. 1.ed. São Paulo: Saraiva,
- HILLIER, F. S.; HILLIER, M.S. **Introdução à ciência da gestão: modelagem e estudos de caso com planilhas eletrônicas**. 2013; 4 ed.
- HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. (2013) **Introdução à Pesquisa Operacional**. 9. ed. Porto Alegre: AMGH.
- LACHTERMACHER, G. (2009) **Pesquisa Operacional na tomada de decisões**. 4. ed. São Paulo: Pearson.

- LATIPOVA, A. T. **Solving linear and bilinear problems with interval uncertainty. Procedia Engineering**, v. 129, p. 670–675, 2015.
- LOESCH, M. (1999) **Logística Global e Gestão da Cadeia de Suprimentos**. São Paulo: Atlas.
- LONGARAY, A.A. (2013) **Introdução à pesquisa operacional**. 1 ed.
- MELLO, J. C. C. B.; MELLO, M. H. C. S. (2003) **Integração entre o ensino de cálculo e o de pesquisa operacional**. Revista Produção, v. 13, n. 2, p. 123
- MONTEVECHI, J. A. B. (2013) **Pesquisa operacional**. Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI).
- MONTINI, D. A. (2004) **Excel: torna-se um especialista nesta poderosa ferramenta**. São Paulo: Digerati Books, 255 p.
- MORAES, D. G.; FERREIRA, C. V.; DA SILVA, A. M. (2019) **Otimização da Produção Utilizando Programação Linear: Estudo de Caso em Uma Indústria de Esquadrias de Alumínio**. Refas – ISSN 2359-182X. v.5, n.4, p.27-37. Edição especial. Abril de 2019.
- MOREIRA, D. A. (2010) **Pesquisa Operacional: curso introdutório**. 2. ed. São Paulo: Cengage Learning.
- PRADO, D. (1999) **Programação Linear**. Belo Horizonte: MG.
- RAGSDALE, C. T. (2009) **Modelagem e Análise de Decisão**. 6ª edição. São Paulo: Cengage Learning.
- Rodrigues, C. (2007). **Modelagem matemática aplicada**. Pearson.
- RODRIGUES, W. C. (2007) **Metodologia Científica**. FAETEC/IST, Paracambi.
- SANTOS, J. C. G.; AFONSO, N. J. (2019) **Aplicação da Programação Linear para apoio a tomada de decisão em uma Empresa simulada**. Revista LAGOS –UFF, Volta Redonda, v. 10, n. 1, Jan / Jun 2019.
- SILVA, L. M. P.; MARROCOS, P. V. O.; ROCHA, M. K.; LOPES, M. J. F. (2023 outubro) **Maximização de receita em planos de telefonia móvel: estudo de caso realizado em empresa de telecomunicações**. XLIII Encontro Nacional de Engenharia de Produção. (ENEGEP). Fortaleza, Ceará, Brasil, 16 a 19 de outubro de 2023.
- SOUZA, G. P. (2021) **Otimização da atribuição de condutores em clínicas no Detran-AL** - Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional de Conhecimento) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Computação. Maceió, 53f.
- SPINELLI, A. C. C.; PEREIRA, A. T.; FONSECA, B. V. S. F.; KANGEYAMA, T. A. K.; SANTOS, Y. B. I. (2023 outubro) **Aplicação da programação linear na elaboração de plano de compras em uma doceria**. XLIII Encontro Nacional de Engenharia de Produção. (ENEGEP). Fortaleza, Ceará, Brasil, 16 a 19 de outubro de 2023.
- Taha, H. A. (2008). **Pesquisa Operacional: Uma Introdução**. Pearson.
- Yin, R. K. (2015). **Estudo de caso: planejamento e métodos**. Bookman.